Ejercicios
Álgebra Lineal MAT127
PUCV

Ejercicio 1 *Determine si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^3$

1. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}$
2. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\right\}$
3. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\right\}$
4. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0,\ x - y = 0\right\}$

Ejercicio 2 *Demuestre que si* V *es el espacio vectorial de las funciones derivables de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$*, entonces*

$$W = \{f \in V : f'(x) = f(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial de V*.*

Ejercicio 3 *Sea* $U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = m+1, w = 0, y = z\right\}$*. Determine los valores de* $m \in \mathbb{R}$ *para los cuales* U *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$*.*

Ejercicio 4 *Sean* $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\right\}$ *y* $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\right\}$

1. *Verifique que* U *y* W *son subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^2$*.*
2. *Demueste que* $U \cup W$ *no es subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$*.*

Ejercicio 5 *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y sean* U *y* W *subespacios vectoriales de* V*. Demuestre que* $U \cup W$ *es un subespacio vectorial de* V *, si y sólo si,* $U \subset W$ *o bien* $W \subset U$*.*

Ejercicio 6 *Sean* $a > 0$*,* U *y* W *los subespacios vectoriales de* $\mathcal{F}([-a,a], \mathbb{R})$ *definidos como sigue:*

$$\begin{aligned} U &= \{f \in \mathcal{F}([-a,a], \mathbb{R}) : \forall x \in [-a,a], f(-x) = f(x)\} \\ W &= \{f \in \mathcal{F}([-a,a], \mathbb{R}) : \forall x \in [-a,a], f(-x) = -f(x)\} \end{aligned}$$

Demuestre que U *y* W *son subespacios vectoriales de* $\mathcal{F}([-a,a], \mathbb{R})$ *y calcule* $.U \cap W$*.*

Ejercicio 7 *Demuestre que el subespacio vectorial de* $\mathbb{K}[x]$ *generado por los polinomios* $1, x, ..., x^n$, *es el espacio vectorial formado por el polinomio nulo y los polinomios de grado menor o igual que* n.

Ejercicio 8 *Demuestre que el subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ *generado por los vectores* $(1,0,2)$ *y* $(0,1,0)$ *es el plano* $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = z\right\}$

Ejercicio 9 *Encuentre* $\langle S \rangle$ *(como subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$*) en los casos siguientes:*

1. $S = \{(1,2,3)\}$
2. $S = \{(1,2,3), (1,-1,2)\}$
3. $S = \{(1,2,3), (1,-1,2), (2,1,5)\}$
4. $S = \{(1,2,3), (1,-1,2), (2,1,1)\}$

Ejercicio 10 *Sean* $U = \langle (1,2,-1), (2,3,2) \rangle$ *y* $W = \langle (1,1,3), (-3,-5,-1) \rangle$. *Demuestre que* $U = W$.

Ejercicio 11 *Determine condiciones sobre* a, b *y* c, *para que* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *sea un elemento del espacio generado por los vectores* $(2,1,0), (1,-1,2)$ *y* $(0,3,-4)$.

Ejercicio 12 *Calcule el espacio generado por los vectores* $(i,0,-i)$ *y* $(1,i,1+i)$ *considerando* $\mathbb{C}^3$ *como espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$ *y luego sobre* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 13 *Demuestre que los conjuntos* $\left\{\sin^2(x), \cos^2(x), \sin(x)\cos(x)\right\}$ *y* $\{1, \sin(2x), \cos(2x)\}$ *generan el mismo subespacio de* $C([a,b], \mathbb{R})$.

Ejercicio 14 *Encuentre* $U \cap W$, *si:*

1. $U = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$ *y* $W = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$
2. $U = \left\{x^2(ax-b) : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ *y* $W = \{cx(1-x) + d : c, d \in \mathbb{R}\}$

Ejercicio 15 *Determine si los siguientes son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.*

1. $\{(a,b,c) : a \in \mathbb{Q}, b, c \in \mathbb{R}\}$ *es un espacio vectorial (sobre* $\mathbb{R}$*) de* $\mathbb{R}^3$.
2. $\{f \in C([a,b], \mathbb{R}) : f(a) = 1\}$ *es un subespacio vectorial de* $C([a,b], \mathbb{R})$.
3. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \vee z - 2y = 0\right\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$.
4. *Si* $U = \{(x,y,z) : x = z, z = 2y\}$ *y* $W = \langle (2,1,-1), (0,-1,3) \rangle$ *son subespacios de* $\mathbb{R}^3$, *entonces* $U \cap W = \{(0,0,0)\}$
5. $\left\{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle x^2 + 1, x - 1 \right\rangle$

Ejercicio 16 *Sean* V *un espacio vectorial sobre* K, $B \subseteq V$ *un conjunto linealmente independiente y* $v \in V$. *Demuestre que* $B \cup \{v\}$ *es un conjunto linealmente independiente, si y sólo si,* $v \notin \langle B \rangle$.

Ejercicio 17 *Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que los vectores* (a, b) *y* (c, d) *de* $\mathbb{R}^2$ *sean linealmente independientes.*

Ejercicio 18 *Sean* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y* $u, v, w \in V$.*¿Qué puede decir de* $\{u, v, w\}$ *si* $\langle u, v \rangle = \langle u, v, w \rangle$*?.*

Ejercicio 19 *¿Son los vectores* $(1, 1, 2, 4), (2, -1, -5, 2), (1, -1, -4, 0), (2, 1, 1, 6)$ *linealmente independientes?. Determine una base para el espacio generado por estos vectores.*

Ejercicio 20 *Sean* $f, g, h \in C([a, b], \mathbb{R})$ *definidas por* $f(x) = \sin^2(x)$, $g(x) = \cos(2x)$ *y* $h(x) = 2$. *¿Es* $\{f, g, h\}$ *un conjunto linealmente independiente?.*

Ejercicio 21 *Sean* $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$ *y* $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 4z = 0\right\}$ *subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Encuentre bases de* U, W *y* $U \cap W$.
2. *Determine* $\dim(U), \dim(W)$ *y* $\dim(U \cap W)$.

Ejercicio 22 *Sean* $u = (1, 0, \lambda)$, $v = (1, \lambda, 0)$ *y* $w = (\lambda, 0, 1)$. *Determine los valores de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *para los cuales* $\{u, v, w\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 23 *Sea* $\mathbb{K}_n[x]$ *el subespacio de* $\mathbb{K}[x]$ *formado por el polinomio nulo y los polinomios de grado menor o igual que* n. *Encuentre una base de* $\mathbb{K}_n[x]$ *y determine* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[x])$.

Ejercicio 24 *Considere los subespacios vectoriales de* $\mathbb{K}_3[x]$ *definidos por* $U = \left\{ax^3 + bx^2 + cx + d : a + b - c = d\right\}$ *y* $W = \left\langle x^3 + x^2 + x + 2 \right\rangle$.

1. *Encuentre bases de* U, W *y* $U \cap W$.
2. *Determine* $\dim(U), \dim(W)$ *y* $\dim(U \cap W)$.

Ejercicio 25 *Sea* $W = \{p(x) \in \mathbb{K}_4[x] : p''(1) = p'(1), p'(-1) = p'(-1)\}$

1. *Encuentre una base de* W.
2. *Determine que vector de la base obtenida en* (1) *puede ser sustituido por el vector* $p(x) = 3x^3 + 11x^2 + 9x - 3$ *de modo que el conjunto siga siendo base.*

Ejercicio 26 *Considere* $\mathbb{C}_2[x]$ *como espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *y sea*

$$U = \left\{z_2 x^2 + z_1 x + z_0 \in \mathbb{C}_2[x] : z_1 = \overline{z_1}\right\}$$

Encuentre $A \subseteq \mathbb{C}_2[x]$ *tal que* $\langle A \rangle = U$ *y determine* $\dim_{\mathbb{R}}(U)$.

Ejercicio 27 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $\{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K} - \{0\}$. Demuestre que $\left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j v_j : k = 1, ..., n \right\}$ es una base de V.*

Ejercicio 28 *Determine si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.*

1. $\left\{ x^3 - 2x + x + 1, \quad x^2 - 7, \quad 2x - 5 \right\}$ *es un subconjunto de $\mathbb{R}_3[x]$ linealmente independiente.*
2. *Si $f, g \in \mathcal{F}([-2, -1], \mathbb{R})$ son tales que $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, entonces f, g es un conjunto linealmente independiente.*
3. *Los vectores $(1 - i, i)$ y $(2, -1 + i)$ de $\mathbb{C}^2$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.*
4. *El conjunto $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.*
5. *Si $U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \right\}$, entonces $\{(1, 0, -1)\}$ es una base de U.*
6. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ *y* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$
7. $\dim_{\mathbb{R}}(C([0, 1], \mathbb{R})) = \infty$
8. *Si $U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x = y \right\}$, entonces $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$.*
9. *Si W es un subespacio vectorial y $\{v_1, v_2\}$ es un subconjunto de W linealmente independiente tal que $W = \langle v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_1 \rangle$, entonces $\dim(W) = 2$.*